第４章　二乗に比例する関数

第１６講・二乗に比例する関数①　関数 $y=ax^2$ のグラフと変域

要点整理

１　関数 $y=ax^2$

(1)　y が x の関数で，その関係が $\boldsymbol{y=ax^2}$（a は**比例定数**，$a \neq 0$）で表されるとき，y は x の**２乗に比例する**という。

(2)　y が x の２乗に比例するとき，x の値が m 倍になると，y の値は m^2 倍になる。

２　関数 $y=ax^2$ のグラフ

(1)　関数 $y=ax^2$ のグラフは，原点を頂点とし，y 軸について対称な**放物線**になる。

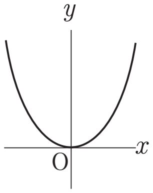
(2)　**$a>0$ のとき，グラフは上に開き**，x 軸の下側にはない。

　$a<0$ のとき，グラフは下に開き，x 軸の上側にはない。

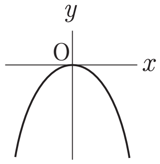
(3)　a の絶対値が大きいほど，グラフの開き方は小さい。

●関数 $y=ax^2$ のグラフ

①　$a>0$ のとき，グラフは上に開く。x が増加するとき，
$x<0$ では，
　y は減少する。
$x>0$ では，
　y は増加する。



②　$a<0$ のとき，グラフは下に開く。x が増加するとき，
$x<0$ では，
　y は増加する。
$x>0$ では，
　y は減少する。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

例題 1

自動車がブレーキをかけ始めてから停止するまでの距離を制動距離という。ある自動車が時速 $x$km で走っているときの制動距離を ym とすると，y は x の 2 乗に比例し，時速 50km で走っているときの制動距離は 20m である。次の問いに答えなさい。

(1)　y を x の式で表せ。

(2)　時速 75km で走っているときの制動距離を求めよ。

(3)　制動距離が 80m になるのは，時速何 km のときか，求めよ。

例題 2

次の問いに答えなさい。

(1)　関数 $y=x^2$ で，x の変域が $-3 \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域を求めよ。

(2)　関数 $y=ax^2$ について，x の変域が $-1 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の変域は $0 \leqq y \leqq 6$ である。a の値を求めよ。

例題 3

2 つの関数 $y=4x+a$，$y=bx^2$ で，x の変域を $-2 \leqq x \leqq c$ とすると，y の変域がともに $0 \leqq y \leqq 24$ となる。a，b，c の値を求めなさい。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

問題

16－1

物を落としたとき，落ち始めてから x 秒間に落ちる距離を ym とすると，y は x の2乗に比例し，落ち始めてから4秒間に落ちる距離が80m になった。次の問いに答えなさい。

(1)　y を x の式で表せ。

(2)　320m の上空から物を落としたとき，地面に落ちるまでの時間を求めよ。

16－2

次の問いに答えなさい。

(1)　関数 $y=-x^2$ について，x の変域が $-3 \leqq x \leqq 2$ のとき，y の変域を求めよ。

(2)　関数 $y=ax^2$ で，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 1$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 12$ となった。このとき，a の値を求めよ。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ *Note* ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講・確認テスト

［1］　時速 $x$km で走る自動車がブレーキをかけ始めてから停止するまでに進む距離（制動距離）を ym とすると，y は x の２乗に比例し，時速 36km のときの制動距離は 9m であるという。次の問いに答えなさい。

⑴　y を x の式で表すと，$y=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウエ}}x^2$ である。

⑵　時速 60km のときの制動距離と時速 48km のときの制動距離の差は $\boxed{オ}$ m である。

⑶　制動距離が 49m のときの自動車の速さは時速 $\boxed{カキ}$ kmである。

［2］　次の問いに答えなさい。

⑴　関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ について，x の変域が $-2 \leqq x \leqq 4$ のとき，y の変域は $\boxed{ク} \leqq y \leqq \boxed{ケ}$ である。

⑵　関数 $y=ax^2$ について，x の変域が $-6 \leqq x \leqq 3$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 27$ となった。このとき，a の値は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ である。

⑶　関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ について，x の変域が $a \leqq x \leqq a+6$ のとき，y の変域が $0 \leqq y \leqq 4$ となった。このとき，a の値は小さい順に $a=-\boxed{シ}$，$-\boxed{ス}$ である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ *Note* ＞

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第4章　二乗に比例する関数

第16講・二乗に比例する関数①　関数 $y=ax^2$ のグラフと変域

例題 1

(1)　$y=\frac{1}{125}x^2$　　(2)　45m　　(3)　時速 100km

解説

(1)　$y=ax^2$ とすると，$x=50$ のとき，$y=20$ だから，$20=2500a$　　$a=\frac{1}{125}$

よって，$y=\frac{1}{125}x^2$

(2)　(1)の式に $x=75$ を代入して，$y=\frac{1}{125}\times75^2=45$

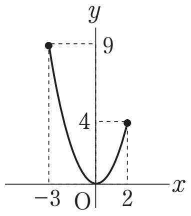
(3)　(1)の式に $y=80$ を代入して，$80=\frac{1}{125}x^2$　　$x^2=10000$　　$x>0$ より，$x=100$

例題 2

(1)　$0\leqq y\leqq9$　　(2)　$a=\frac{2}{3}$

解説

(1)　右のグラフより，y の変域は $0\leqq y\leqq9$



(2)　$x=3$ のとき $y=6$ になるから，$6=9a$　　$a=\frac{2}{3}$

例題 3

$a=8$，$b=\frac{3}{2}$，$c=4$

解説

$y=4x+a$ のグラフは右上がりの直線だから点$(-2,\ 0)$を通る。よって，$a=8$

$y=4x+8$ のグラフは点$(c,\ 24)$を通ることから，$c=4$

点$(4,\ 24)$は $y=bx^2$ のグラフ上の点になることから，$b=\frac{3}{2}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

16－1

(1)　$\boldsymbol{y=5x^2}$　　(2)　**8秒**

解説

(1)　$y=ax^2$ とすると，$x=4$ のとき $y=80$ だから，$80=16a$　　$a=5$

(2)　$y=5x^2$ に $y=320$ を代入して，$x^2=64$　　$x>0$ より，$x=8$

16－2

(1)　$\boldsymbol{-9\leqq y\leqq 0}$　　(2)　$\boldsymbol{a=3}$

解説

(1)　右の図1のようなグラフをかいて考える。

(2)　右の図2のようなグラフをかいて考える。

$y=ax^2$ のグラフは，点$(-2,\ 12)$を通る。

図1

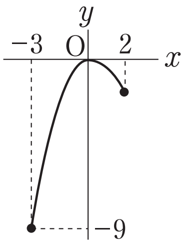
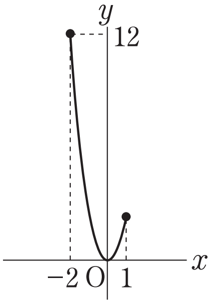


図2



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講・確認テスト

[1]　時速$x$kmで走る自動車がブレーキをかけ始めてから停止するまでに進む距離(制動距離)をymとすると，yはxの2乗に比例し，時速36kmのときの制動距離は9mであるという。次の問いに答えなさい。

(1)　yをxの式で表すと，$y=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウエ}}x^2$である。

(2)　時速60kmのときの制動距離と時速48kmのときの制動距離の差は$\boxed{オ}$mである。

(3)　制動距離が49mのときの自動車の速さは時速$\boxed{カキ}$kmである。

[2]　次の問いに答えなさい。

(1)　関数$y=\dfrac{1}{2}x^2$について，xの変域が$-2 \leqq x \leqq 4$のとき，yの変域は$\boxed{ク} \leqq y \leqq \boxed{ケ}$である。

(2)　関数$y=ax^2$について，xの変域が$-6 \leqq x \leqq 3$のとき，yの変域が$0 \leqq y \leqq 27$となった。このとき，aの値は$\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$である。

(3)　関数$y=\dfrac{1}{4}x^2$について，xの変域が$a \leqq x \leqq a+6$のとき，yの変域が$0 \leqq y \leqq 4$となった。このとき，aの値は小さい順に$a=-\boxed{シ}$，$-\boxed{ス}$である。

解答

[1]	ア　1	イ　1	ウ　4	エ　4	オ　9	カ　8	キ　4
[2]	ク　0	ケ　8	コ　3	サ　4	シ　4	ス　2	

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

解説

［1］

(1)　$y=ax^2$ に $x=36$，$y=9$ を代入して，$9=36^2a$，$a=\dfrac{9}{36^2}=\dfrac{1}{144}$

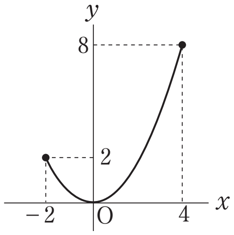
(2)　$y=\dfrac{1}{144}x^2$ に $x=60$ を代入して，$y=\dfrac{1}{144}\times60^2=25$(m)

$x=48$ を代入して，$y=\dfrac{1}{144}\times48^2=16$(m)

(3)　$y=\dfrac{1}{144}x^2$ に $y=49$ を代入して，$49=\dfrac{1}{144}x^2$　　これを解くと，$x=\pm84$

$x>0$ より，$x=84$

［2］

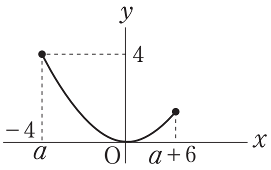


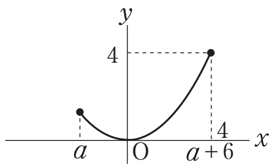
(1)　右のグラフより，y の変域は $0\leqq y\leqq8$

(2)　$x=-6$ のとき $y=27$ になるから，

$27=36a$，$a=\dfrac{3}{4}$

(3)　y の最小値が 0 なので，$a\leqq0$，$a+6\geqq0$ であることがわかる。また，$y=4$ となるのは，x の値が a，または $a+6$ のときである。$4=\dfrac{1}{4}x^2$ より，$x=\pm4$





よって，$a=-4$　　または，$a+6=4$ より，$a=-2$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。